Translation of Classification of Quadrilatierals The Four-Gon Family Tree A Diagonal Connect : A Ramachandran_From Azim premji University At Right Angles_June, 2012

चतुर्भुजों का वर्गीकरण
चार-भुजाओं की वंशावली
विकर्ण सम्बन्ध

ए रामचन्द्रन

वर्गीकरण को पारम्परिक रूप से जीवविज्ञानियों के विशिष्ट क्षेत्र के तौर पर परिभाषित किया गया है। पर वर्गीकरण के कई शैक्षिक निहितार्थ भी हैं-क्योंकि यह वर्गीकृत की जा रही वस्तुओं के गुणों पर आधारित है। इस लेख में बहुभुजों के एक परिचित प्रकार, चतुर्भुज और इन्हें एक अलग तरीक़े से कैसे वर्गीकृत किया जा सकता है, इस पर एक नज़र डाली गई है।

पारम्परिक रूप से चतुर्भुजों को उनकी भुजाओं (बराबर, लम्बवत, समान्तर) या कोणों (बराबर, सम्पूरक) के आधार पर वर्गीकृत किया गया है। इस लेख में हम चतुर्भुजों के विकर्णों के कुछ गुणों के आधार पर एक वर्गीकरण प्रस्तुत कर रहे हैं। इस पद्धति में विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों के बीच कुछ सम्बन्ध स्पष्ट होते हैं और चतुर्भुजों के कुछ प्रकार एक नई रौशनी में सामने आते हैं।

चतुर्भुजों के विभिन्न प्रकारों का निर्धारण करने के लिए तीन पैरामीटर बताए गए हैं :

1. विकर्णों की समानता या असमानता
2. विकर्णों का एक-दूसरे पर लम्ब होना या लम्ब न होना
3. विकर्णों के प्रतिच्छेदन का तरीक़ा। इसमें चार स्थितियाँ सम्भव हैं :
   क) विकर्ण एक-दूसरे को समद्विविभाजित करते हों।
   ख) केवल एक ही विकर्ण दूसरे से समद्विविभाजित होता हो।
   ग) कोई भी विकर्ण दूसरे विकर्ण द्वारा समद्विविभाजित नहीं होता हो, पर दोनों समान अनुपात में विभाजित होते हों।
   घ) कोई भी विकर्ण दूसरे विकर्ण द्वारा समद्विविभाजित नहीं होता हो, पर दोनों एक-दूसरे को अलग अनुपात में विभाजित करते हों।

	समान विकर्ण		असमान विकर्ण	
	लम्ब हैं	**लम्ब नहीं हैं**	**लम्ब हैं**	**लम्ब नहीं हैं**
दोनों विकर्ण समद्विविभाजित होते हैं।	वर्ग	सामान्य आयत	सामान्य समचतुर्भुज	सामान्य समान्तर चतुर्भुज
विकर्ण समान अनुपात में विभाजित होते हैं। (1:1 में नहीं)	समद्विबाहु समलम्ब जिसके विकर्ण एक-दूसरे पर लम्ब हैं।	समद्विबाहु समलम्ब	सामान्य समलम्ब जिसके विकर्ण एक-दूसरे पर लम्ब हैं।	सामान्य समलम्ब
सिर्फ़ एक विकर्ण समद्विविभाजित होता है।	समान विकर्णों वाली पतंग	समान विकर्णों वाली तिरछी पतंग	पतंग	तिरछी पतंग
विकर्ण अलग-अलग अनुपात में विभाजित होते हैं और कोई भी विकर्ण समद्विविभाजित नहीं होता है।	सामान्य चतुर्भुज जिसके विकर्ण बराबर और एक-दूसरे पर लम्ब हैं।	सामान्य चतुर्भुज जिसके विकर्ण बराबर हैं	सामान्य चतुर्भुज जिसके विकर्ण एक-दूसरे पर लम्ब हैं।	सामान्य चतुर्भुज

तालिका-1 विकर्णों के गुणों पर आधारित चतुर्भुजों के प्रकार

	समान विकर्ण		असमान विकर्ण	
	लम्ब	**कोई लम्ब नहीं**	**लम्ब**	**कोई लम्ब नहीं**
दोनों विकर्ण समद्विविभाजित होते हैं।	चक्रीय (4)	चक्रीय (2)	चक्रीय नहीं (2)	चक्रीय नहीं (0)
विकर्ण समान अनुपात में विभाजित होते हैं (1:1 में नहीं)।	चक्रीय (1)	चक्रीय (1)	चक्रीय नहीं (2)	चक्रीय नहीं (0)
सिर्फ़ एक विकर्ण समद्विविभाजित होता है।	चक्रीय नहीं (1)	चक्रीय नहीं (0)	चक्रीय या चक्रीय नहीं (1)	चक्रीय या चक्रीय नहीं (0)
विकर्ण अलग-अलग अनुपात में विभाजित होते हैं और कोई भी विकर्ण समद्विविभाजित नहीं होता है।	चक्रीय नहीं (0)	चक्रीय नहीं (0)	चक्रीय या चक्रीय नहीं (1)	चक्रीय या चक्रीय नहीं (0)

तालिका-2 : चतुर्भुजों की चक्रीय या चक्रीय नहीं होने की प्रवृत्ति और परावर्तीय सममिति अक्षों की संख्या (कोष्ठक में दर्शाई गई है)

यह पैरामीटर **तालिका-1** में सूचीबद्ध 16 प्रकार के चतुर्भुजों को बताने में सहायक हैं। हालाँकि यह स्पष्ट होना चाहिए कि यहाँ 'तिरछी पतंग' का अर्थ आम बोलचाल की भाषा में प्रयुक्त अर्थ से नहीं है।

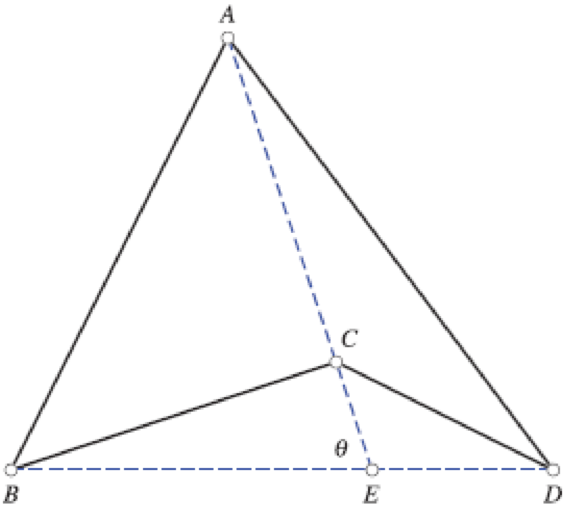
इन प्रकारों के बीच कुछ सम्बन्ध तो स्पष्ट हैं। कॉलम 2 और 3 के चतुर्भुज कॉलम 4 के सम्बन्धित चतुर्भुजों से (क्रमश: विकर्णों को बराबर और एक-दूसरे पर लम्ब करके) प्राप्त किए जाते हैं, जबकि कॉलम 1 के चतुर्भुजों को इन दोनों शर्तों को लागू करके प्राप्त किया जाता है।

कॉलम 1 के किसी भी चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को क्रमवार तरीक़े से जोड़ने पर एक वर्ग प्राप्त होता है। इसी प्रकार कॉलम 2 से एक सामान्य समचतुर्भुज, कॉलम 3 से एक सामान्य आयत और कॉलम 4 से एक सामान्य समान्तर चतुर्भुज प्राप्त होता है।

तालिका-2 से प्रत्येक प्रकार के चतुर्भुज की चक्रीय होने/चक्रीय नहीं होने की प्रवृत्ति और परावर्तीय सममित अक्षों (Reflection symmetry axes) की संख्या के बारे में पता चलता है। दोनों ही मामलों में रोचक पैटर्न देखने को मिलता है।

समान अनुपात (जिसमें 1:1 भी शामिल है) में विभाजित समान विकर्णों वाले चतुर्भुज अनिवार्य रूप से चक्रीय होते हैं क्योंकि उनके आपसी प्रतिच्छेदन से प्राप्त हुए खण्डों के गुणनफल समान होंगे। समान अनुपात में विभाजित असमान विकर्णों वाले चतुर्भुज और असमान अनुपात में विभाजित समान विकर्णों वाले चतुर्भुज अनिवार्य रूप से चक्रीय नहीं होते हैं क्योंकि खण्डों के गुणनफल असमान होंगे। असमान अनुपात में विभाजित असमान विकर्णों वाले चतुर्भुज दोनों में से किसी भी प्रकार के हो सकते हैं।

सबसे अधिक सममिति वाला चतुर्भुज तालिका में सबसे ऊपर बाईं ओर स्थित है, जबकि सबसे कम सममिति वाला चतुर्भुज सबसे नीचे दाईं ओर स्थित है। इन दो सीमाओं के बीच सममिति के गुणों में क्रमिक स्थापन (Gradation) देखा जा सकता है।



- $[ABCD] = [\triangle ABC] + [\triangle ADC]$
- $[\triangle ABC] = [\triangle ABE] - [\triangle CBE]$
- $[\triangle ADC] = [\triangle ADE] - [\triangle CDE]$
- $[\triangle ABE] = \frac{1}{2} AE \cdot BE \cdot \sin\theta$
- $[\triangle CBE] = \frac{1}{2} CE \cdot BE \cdot \sin\theta$
- $[\triangle ADE] = \frac{1}{2} AE \cdot DE \cdot \sin\theta$
- $[\triangle CDE] = \frac{1}{2} CE \cdot DE \cdot \sin\theta$

चित्र-1 : वर्ग कोष्ठक क्षेत्रफल दर्शाते हैं : $[\Delta ABC]$ ΔABC का क्षेत्रफल दर्शाता है, आदि।

यह पद्धति इन आकृतियों के क्षेत्रफल के लिए एक उभयनिष्ठ सूत्र भी सुझाती है। कॉलम 4 के किसी भी चतुर्भुज का क्षेत्रफल इस सूत्र $A = \frac{1}{2} d_1 d_2 sin\theta$ से ज्ञात किया जा सकता है, जहाँ d_1, d_2 विकर्णों की लम्बाई और θ विकर्णों के बीच का कोण है। कॉलम 3 के लिए यह सूत्र $A = \frac{1}{2} d_1 d_2$, कॉलम 2 के लिए $A = \frac{1}{2} d^2 sin\theta$ और कॉलम 1 के लिए $A = \frac{1}{2} d^2$ में सरलीकृत हो जाता है।

क्षेत्रफल का यह सामान्य सूत्र $A = \frac{1}{2} d_1 d_2 sin\theta$ कुछ अन्य विशेष प्रकार के चतुर्भुजों के मामले में भी लागू होता है।

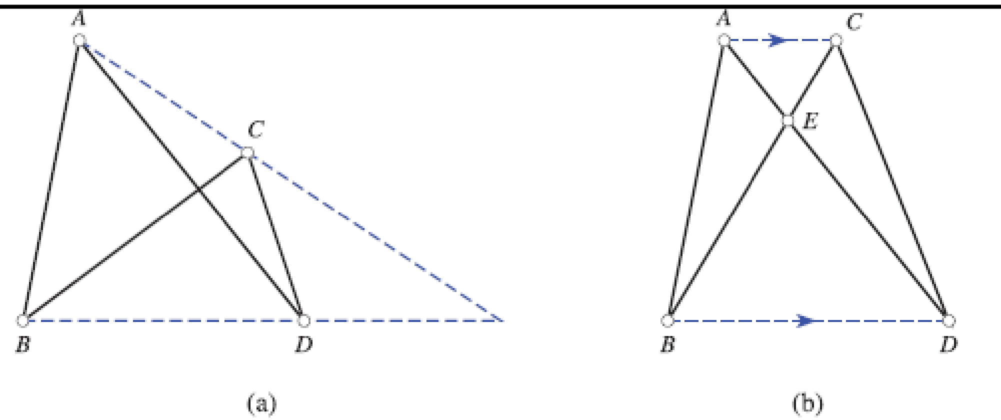
ग़ैर-उत्तल (Non-Convex) या अन्त:प्रविष्ट चतुर्भुज (Re-entrant quadrilateral) वह हैं जिनका एक विकर्ण (जो कि प्रतिच्छेदी न हो) आकृति के बाहर स्थित होता है। इन आकृतियों के लिए इस सूत्र की प्रासंगिकता **चित्र-1** में दर्शाई गई है। गणना से पता चलता है कि :

$$[ABCD] = [\Delta ABC] + [\Delta ADC] = [\Delta ABE] - [\Delta CBE] + [\Delta ADE] - [\Delta CDE]$$

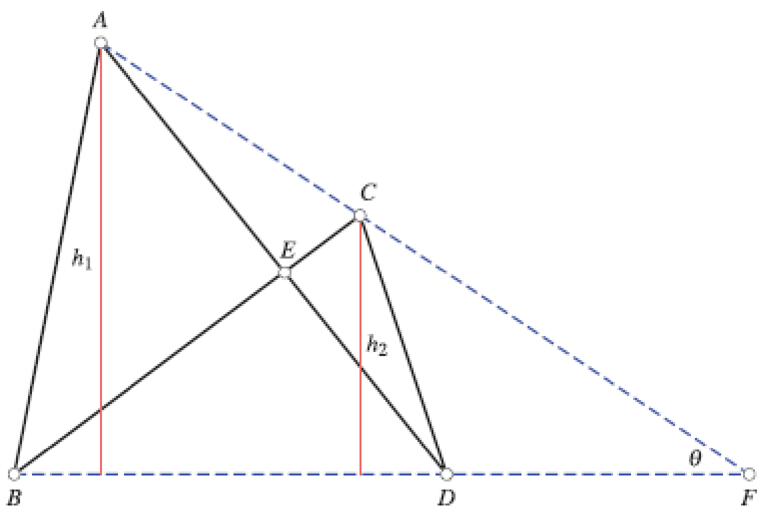
$$= \frac{1}{2} sin\theta (AE \cdot BE - CE \cdot BE + AE \cdot DE - CE \cdot DE)$$

$$= \frac{1}{2} sin\theta (AC \cdot BE + AC \cdot DE) = \frac{1}{2} sin\theta (AC \cdot BD)$$

स्व-प्रतिच्छेदी परिमापों वाले प्रतिवर्ती चतुर्भुजों (Reflex quadrilaterals), जैसे कि **चित्र-2** में दर्शाए गए हैं, के विकर्णों (जो कि प्रतिच्छेदी न हों) को आकृति के बाहर स्थित माना जा सकता है। ऐसे आकृतियों के लिए क्षेत्रफल के इस सूत्र की प्रासंगिकता **चित्र-3** में दर्शाई गई है। यहाँ इस आकृति का क्षेत्रफल दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल का *अन्तर* है, चूँकि सर्किट ABCDA को पार करने में हम त्रिभुजों के चारों ओर विपरीत दिशा में जाते हैं।



चित्र-2 : प्रतिवर्ती चतुर्भुज : विकर्ण AC और BD प्रतिवर्ती चतुर्भुज ABCDA (जिसका परिमाप स्व-प्रतिच्छेदी है) के बाहर स्थित हैं।



चित्र-3

इसलिए, **चित्र-3** में

$$[ABCDA] = [\Delta ABE] - [\Delta CDE] = [\Delta ABD] - [\Delta CBD]$$

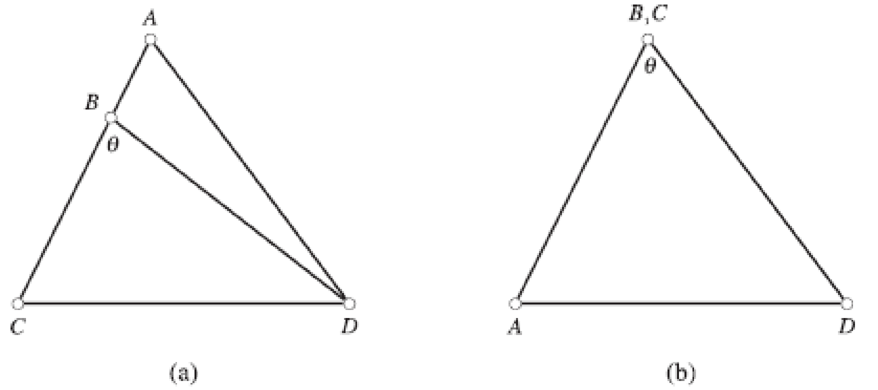
$$= \frac{1}{2} BD \cdot h_1 - \frac{1}{2} BD \cdot h_2 = \frac{1}{2} BD \cdot (h_1 - h_2)$$

$$= \frac{1}{2} BD \cdot (AFsin\theta - CFsin\theta) = \frac{1}{2} BDsin\theta \cdot (AF - CF)$$

$$=\frac{1}{2}BD \cdot AC\ sin\theta$$

जब $AC||BD$, तब सूत्र के अनुसार क्षेत्रफल 0 होगा। यह तार्किक है, क्योंकि **चित्र-2(b)** के अनुसार चतुर्भुज ABCDA का क्षेत्रफल है :

$$[ABCDA] = [\Delta ABE] - [\Delta CDE]$$
$$= ([\Delta ABE] + [\Delta EBD]) - ([\Delta CDE] - [\Delta EBD])$$
$$= [\Delta ABD] - [\Delta CBD] = 0$$



चित्र-4 : एक विकृत चतुर्भुज (Degenerate quadrilateral) ABCD के दो उदाहरण; (a) में शीर्ष B विकर्ण AC पर स्थित है और (b) में शीर्ष B और C सम्पाती हैं।

यदि एक या दोनों विकर्ण एक-दूसरे को सिर्फ़ स्पर्श करते हैं, तो आकृति एक त्रिभुज में परिवर्तित हो जाती है और यह सूत्र त्रिभुज के क्षेत्रफल सम्बन्धित सूत्र में बदल जाता है, $A = \frac{1}{2}absinC$ (चित्र 4 देखें)। सूत्र $A = \frac{1}{2}AC \cdot BDsin\theta$ भी मान्य होता है।

निष्कर्ष में यह कहा जा सकता है कि यह पद्धति ऐसे विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों को जोड़ती है जिनसे बच्चों का सामना कक्षा में होता है। साथ ही यह कुछ विशिष्ट प्रकार के चतुर्भुजों की पहचान भी करती है। यह कुछ नई परिभाषाएँ भी सुझाती है, जैसे कि *समलम्ब चतुर्भुज (Trapezium) एक ऐसी आकृति है जिसके विकर्ण एक-दूसरे को समान अनुपात में काटते हैं*। इस पद्धति में विकर्ण थीम में परिवर्तन के तौर पर ग़ैर-उत्तल और प्रतिवर्ती चतुर्भुजों पर भी चर्चा की गई है। सूत्र $A = \frac{1}{2}d_1d_2sin\theta$ को चतुर्भुजों के लिए सबसे आमतौर पर लागू होने वाले सूत्र के रूप में प्रस्तुत किया गया है।

ए रामचन्द्रन की गणित और विज्ञान-शिक्षण में काफ़ी लम्बे समय से रुचि रही है। उन्होंने स्नातक स्तर पर गणित और भौतिकविज्ञान की पढ़ाई की। फिर स्नातकोत्तर स्तर पर जीवविज्ञान की पढ़ाई की। वे दो दशकों से ऋषि वैली स्कूल में माध्यमिक स्तर के विद्यार्थियों को विज्ञान, गणित और भूगोल पढ़ा रहे हैं। अँग्रेज़ी भाषा और भारतीय संगीत में भी उनकी रुचि है। उनसे ramachandran@rishivalley.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कुमार गन्धर्व
पुनरीक्षण एवं कॉपी एडीटिंग : कविता तिवारी **सम्पादन :** राजेश उत्साही